Hertentamen Kansrekening

Woensdag 31 augustus 2005

1. a) Selma heeft de hinderlijke gewoonte om gebruikte lucifers terug te stoppen in het doosje. Hierdoor bevat een lucifersdoosje dat zij in gebruik heeft altijd zowel bruikbare als verbrande lucifers. Het totaal aantal lucifers in een doosje bedraagt N. Neem aan dat elke lucifer in het doosje een evengrote kans heeft om 'getrokken' te worden. Bereken de kans dat er na k lucifers voor het eerst een verbrande lucifer wordt getrokken.

   b) Stefan rookt sigaretten en hij heeft altijd twee doosjes met lucifers bij zich, een doosje in zijn linker broekzak en een doosje in zijn rechter broekzak. Het aantal lucifers in een nieuw doosje is N. Als hij een sigaret wil aansteken kiest hij eerst aselect een broekzak uit, pakt een lucifer uit het bijbehorende doosje en steekt de sigaret aan (en gooit de lucifer weg).
   Wat is de kans dat na n lucifers getrokken te hebben beide doosjes hetzelfde aantal lucifers bevatten?

2. Als een vliegtuig zich in een bepaald gebied bevindt, wordt het door een radarsysteem gedetecteerd met kans 0.99. Als er geen vliegtuig is, kan de radar foutief melding maken van de aanwezigheid van een vliegtuig met kans 0.05. De kans dat er een vliegtuig in de buurt is, is gelijk aan 0.05.

   a) Wat is de kans op vals alarm (een foutieve melding van een vliegtuig), en wat is de kans op een gemiste detectie (er wordt niks geregistreerd, hoewel er een vliegtuig in de buurt is)?

   b) Bereken de kans dat als er een detectie is, er ook daadwerkelijk een vliegtuig in de buurt is.

3. Zij Ω een kansruimte met kansmaat P en $B \subset \Omega$ is een gebeurtenis met $P(B) > 0$. Laat zien dat de voorwaardelijke kans $A \mapsto P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ aan de volgende axioma's van een waarschijnlijkheidsruimte voldoet:

   a) $0 \leq P(A|B) \leq 1$, voor alle gebeurtenissen A

   b) $P(\Omega|B) = 1$

   c) Voor een rij $(A_i)_{i=1,2,\ldots}$ van paarsgewijs disjuncte gebeurtenissen in Ω geldt $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

Z.0.2.

4. Gegeven de dichtheden van de onafhankelijke stochasten X en Y:

$$f_X(x) = 1_{[0,1]}(x), \ f_Y(y) = 1_{[0,1]}(y)$$

   a) Bereken de dichtheid van $Z = XY$

   b) Controleer door directe berekening dat $EZ = EX \cdot EY$.

5. Laat $X_1, X_2, \ldots, X_n$, stochasten zijn met $E(X_i) = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Bewijs dat de volgende formule geldt:

$$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{i<j}^{n} Cov(X_i, X_j).$$